molnar1956@yahoo.com

AL 1 * Fie $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ termenii unei progresii aritmetice de raţie r. Ştiind că $a_{50} = 26$ şi $a_{100} = 51$, să se determine r şi formula termenului general a_n.

molnar1956@yahoo.com

AL 2 * Să se determine $x \in \mathbb{R}$ ştiind că numerele $2^x - 1, 6^x, 3^x + 1$ sunt în progresie aritmetică.

$$6^x = \frac{2^x - 1 + 3^x + 1}{2}$$

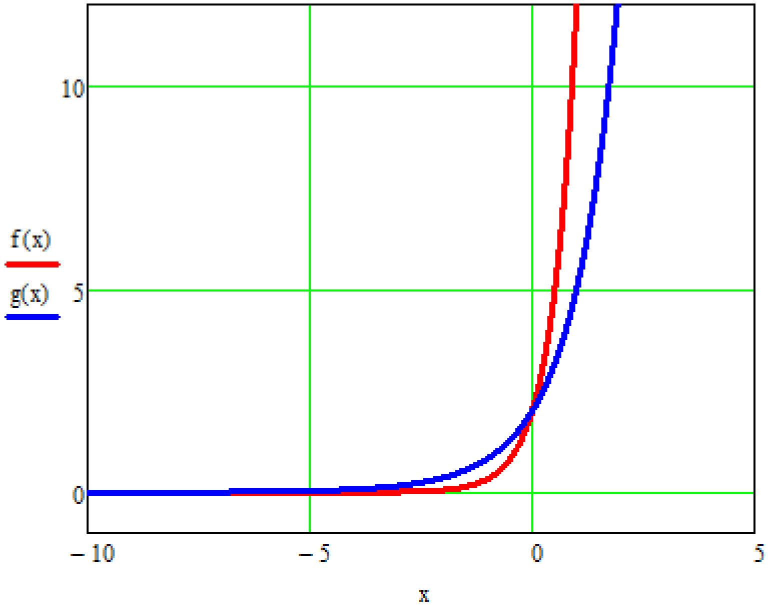
$$2 \cdot 6^x = 2^x + 3^x$$

$$f(x) = 2 \cdot 6^x$$

$$g(x) = 2^x + 3^x$$

$$f(0) = g(0) = 2$$

$$x = 0$$



a

molnar1956@yahoo.com

AL 3 Fie $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ termenii unei progresii geometrice strict crescătoare de raţie q. Ştiind că $a_0 = 1$ şi $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, să se determine raţia q şi suma $S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$ a primilor $n + 1$ termeni ai progresiei.

molnar1956@yahoo.com

AL 4 * Notăm cu $n \in \mathbb{N}$ numărul de valori reale ale lui x, cu $x > 1$, pentru care numerele $\lg(x+1)$, $\lg x$, $\lg \sqrt[4]{x+1}$ (în această ordine) sunt în progresie geometrică. Să se determine n.

molnar1956@yahoo.com

AL 5 * Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_4 = 1$ şi raţia $r = \frac{1}{2}$. Sa se afle a_1 şi a_8.

molnar1956@yahoo.com

AL 6 * Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, cu raţia $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ şi

$$S_1 = b_1 + b_2 + ... + b_n,\ S_2 = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + ... + \frac{1}{b_n},\ P = b_1^2 \cdot b_2^2 \cdot ... \cdot b_n^2.$$

Să se exprime P în funcţie de S_1 şi S_2.

molnar1956@yahoo.com

AL 7 Fie progresia geometrică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, având termenii strict pozitivi şi raţia $r = 2013$. Dacă

$$S = \frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 + a_3}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{2013} + a_{2014}}{a_{2014} + a_{2015}},$$

atunci:

molnar1956@yahoo.com

AL 8 Să se determine toate numerele $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\left[\dfrac{3x+1}{5}\right]$, $2x+1$ şi $4x+1$ sunt în progresie aritmetică (în această ordine).

$$2x+1=\frac{[\frac{3x+1}{5}]+4x+1}{2}$$

$$4x+2=[\frac{3x+1}{5}]+4x+1$$

$$[\frac{3x+1}{5}]=1$$

$$1\le\frac{3x+1}{5}<2$$

$$5\le 3x+1<10$$

$$4\le 3x<9$$

$$\frac{4}{3}\le x<3$$

$$x\in[\frac{4}{3};3)$$

b

molnar1956@yahoo.com

AL 9 Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{(n+2)!}$, $a_0 = 0$. Să se stabilească dacă:

molnar1956@yahoo.com

AL 10 Să se determine partea întreagă a numărului $x = \dfrac{1}{2\sqrt{5}-4} + \sqrt{2}$.

$$x = \frac{1}{2\sqrt{5}-4} + \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{5}+4}{20-16} + \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{5}+4}{4} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 + \sqrt{2}$$

$$[\frac{\sqrt{5}}{2} + 1 + \sqrt{2}] = [\frac{2,24}{2} + 1 + 1,41] = [1,12 + 1 + 1,41] = [3,63] = 3$$

b

molnar1956@yahoo.com

AL 11 * Notând cu S mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\left[\dfrac{x-2}{3}\right] = \dfrac{2x-4}{5}$, $x \geq 2$, să se precizeze care din următoarele mulţimi este S.

molnar1956@yahoo.com


AL 12 Fie mulţimea $M=\left\{x\in\mathbb{R}:\left[\frac{x+3}{2}\right]=\frac{4x+5}{3}\right\}$. Să se calculeze $S=\sum_{x\in M}|x|$.

$$\left[\frac{x+3}{2}\right]=\frac{4x+5}{3}$$

$$\frac{4x+5}{3}\le\frac{x+3}{2}<\frac{4x+5}{3}+1$$

$$8x+10\le 3x+9<8x+16$$

$$\begin{cases}5x\le -1\\ x>-\frac{7}{5}\end{cases}$$

$$x\in\left(-\frac{7}{5};-\frac{1}{5}\right]$$

$$4x\in\left(-\frac{28}{5};-\frac{4}{5}\right]$$

$$4x+5\in\left(-\frac{3}{5};\frac{21}{5}\right]$$

$$\frac{4x+5}{3}\in\left(-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right]$$

$$\begin{cases}\frac{4x+5}{3}\in Z\\ \frac{4x+5}{3}\in\left(-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{4x+5}{3}=0\\ \frac{4x+5}{3}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{5}{4}\\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$S=\sum_{x\in M}|x|=\left|-\frac{5}{4}\right|+\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{5+2}{4}=\frac{7}{4}$$

d

molnar1956@yahoo.com

AL 13 * Să se determine toate valorile lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele

$$a = \left[\frac{x+1}{3}\right],\ b = \frac{3x-5}{4} \text{ şi } c = \left[\frac{2x+5}{6}\right]$$

să verifice relaţia $a + c = 2b$.

molnar1956@yahoo.com

AL 14 * Notând cu S mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{[x]},$$

să se precizeze care din următoarele mulţimi este S.

molnar1956@yahoo.com

AL 15 Să se determine funcţia de gradul întâi ştiind că graficul său taie axa Ox în $x = \sqrt{3}$ şi trece prin punctul $B(2\sqrt{3}, 2)$.

molnar1956@yahoo.com

AL 16 În câte puncte taie axa Ox graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ pentru } x < 0 \\ -2x - 3, \text{ pentru } x \geq 0. \end{cases}$$

molnar1956@yahoo.com

AL 17 * Să se calculeze

$$E_1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \text{ şi } E_2 = |x_1 - x_2|,$$

ştiind că x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + ax - 1 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$E_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{a^2 + 2}{1} = a^2 + 2$$

$$E_2 = |x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \left| \frac{\sqrt{a^2 + 4}}{1} \right| = \sqrt{a^2 + 4}$$

b

molnar1956@yahoo.com

AL 18 * Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea cu rădăcinile $y_1 = \frac{x_2^3}{x_1^2}$ şi $y_2 = \frac{x_1^3}{x_2^2}$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$$S = y_1 + y_2 = \frac{x_2^3}{x_1^2} + \frac{x_1^3}{x_2^2} = \frac{x_1^5 + x_2^5}{x_1^2 x_2^2} = \frac{-5a^2 - 5a - 1}{a^2}$$

$$x_1^2 - x_1 - a = 0$$

$$x_1^5 - x_1^3 - ax_1^3 = 0$$

$$-x_1^4 - x_1^3 + ax_1^2 = 0$$

===============

$$x_1^5 - x_1^3(a+1) + ax_1^2 = 0$$

$$x_1^3(a+1) + x_1^2(a+1) - a(a+1)x_1 = 0$$

===============

$$x_1^5 + x_1^2(2a+1) - (a^2+a)x_1 = 0$$

$$x_1^5 = -x_1^2(2a+1) + (a^2+a)x_1$$

$$x_1^5 = -x_1^2(2a+1) + (a^2+a)x_1$$

$$x_2^5 = -x_2^2(2a+1) + (a^2+a)x_2$$

======================

$$x_1^5 + x_2^5 = -(x_1^2 + x_2^2)(2a+1) + (a^2+a)(x_1+x_2) =$$

$$= -(2a+1)(1+2a) + (a^2+a)(-1) = -5a^2 - 5a - 1$$

$$P = y_1 y_2 = \frac{x_2^3}{x_1^2} \cdot \frac{x_1^3}{x_2^2} = x_1 x_2 = -a$$

d

molnar1956@yahoo.com

AL 19 * Fie x_1 si x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 - x + a = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Notăm $S_n = x_1^n + x_2^n$, pentru orice n număr natural nenul. Atunci expresia $S_n - S_{n-1}$, $n \geq 3$, este egală cu:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = a \end{cases}$$

$$x_1^2 - x_1 + a = 0$$

$$x_1^n - x_1^{n-1} + a \cdot x_1^{n-2} = 0$$

$$x_1^n - x_1^{n-1} = -a \cdot x_1^{n-2}$$

$$S_n - S_{n-1} = x_1^n + x_2^n - x_1^{n-1} - x_2^{n-1} = (x_1^n - x_1^{n-1}) + (x_2^n - x_2^{n-1}) = -ax_1^{n-2} - ax_2^{n-2} =$$

$$= -ax_1^{n-2} - ax_2^{n-2} = -a(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = -aS_{n-2}$$

c

molnar1956@yahoo.com

AL 20 Fie ecuaţia $7mx^2+(2m+1)x+m+1=0$, $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ale cărei rădăcini sunt x_1 şi x_2. Să se determine o relaţie independentă de m între rădăcinile ecuaţiei.

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2m+1}{7m} \\ x_1x_2=\dfrac{m+1}{7m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2m}{7m}-\dfrac{1}{7m} \\ x_1x_2=\dfrac{m}{7m}+\dfrac{1}{7m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{7m} \\ x_1x_2=\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_1x_2=-\frac{1}{7}$$

d

molnar1956@yahoo.com

AL 21 Fie ecuaţia $2x^2 - 2(2-m)x + 2m^2 + 4m + 3 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Dacă ecuaţia are rădăcinile $x_1(m)$, $x_2(m)$, precizaţi valoarea maximă a expresiei $E = x_1^2(m) + x_2^2(m)$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(2-m)}{2} \\ x_1 x_2 = \dfrac{2m^2 + 4m + 3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - m \\ x_1 x_2 = \dfrac{2m^2 + 4m + 3}{2} \end{cases}$$

$$E = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2-m)^2 - 2m^2 - 4m - 3 =$$

$$= 4 - 4m + m^2 - 2m^2 - 4m - 3 = -m^2 - 8m + 1$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

$$\Delta = 64 + 4 = 68$$

$$MAX = -\frac{68}{-4} = 17$$

b

molnar1956@yahoo.com

AL 22 Să se determine valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuaţia

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{ax^2-2x-\frac{1}{a}}=0,$$

să aibă cel puţin o rădăcină reală.

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ ax^2-2x-\dfrac{1}{a}\geq 0 \end{cases} \qquad \sqrt{x-2}+\sqrt{ax^2-2x-\frac{1}{a}}=0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ ax^2-2x-\dfrac{1}{a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ 4a-4-\dfrac{1}{a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ 4a^2-4a-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ a_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

c

molnar1956@yahoo.com

AL 23 Să se găsească rădăcinile reale ale ecuaţiei

$$x^2 - 2a(x-1) - x(a+1) = -a,$$

unde a este un parametru real.

$$x^2 - 2a(x-1) - x(a+1) = -a$$

$$x^2 - 2ax + 2a - ax - x + a = 0$$

$$x^2 - 3ax - x + 3a = 0$$

$$x^2 - x(3a+1) + 3a = 0$$

$$\Delta = (3a+1)^2 - 12a = 9a^2 + 6a + 1 - 12a = 9a^2 - 6a + 1 = (3a-1)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{3a + 1 \pm (3a-1)}{2}$$

$$x_1 = \frac{6a}{2} = 3a$$

$$x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

d

molnar1956@yahoo.com

AL 24 Să se găsească rădăcinile reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{1-x-2x^2} = -x-1.$$

$$\begin{cases} -2x^2 - x + 1 \geq 0 \\ -x-1 \geq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x^2-x+1$	-	-	0	+	0	-	-
$-x-1$	+	+	0	-	-	-	-

$$-2x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{-4}$$

$$x_1 = \frac{4}{-4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$D = \{-1\}$$

Soluția este: $x = -1$

d

molnar1956@yahoo.com

AL 25 Fie n un număr natural nenul. Soluţia inecuaţiei

$$nx^2 - 2x + 1 + n \leq 0,$$

este dată de:

$$n \neq 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4n(1+n) = 4 - 4n - 4n^2 = -4(n^2 + n - 1)$$

x	0				$+\infty$
$-4(n^2+n-1)$	|	-	-	-	-

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow nx^2 - 2x + 1 + n > 0 \Rightarrow x \in \phi$$

b

molnar1956@yahoo.com

AL 26 * Fie mulţimile

$$A=\left(-\infty,\frac{m+\sqrt{-m}}{m}\right]\cup\left[\frac{m-\sqrt{-m}}{m},+\infty\right),\qquad \text{respectiv } B=\left[\frac{m+\sqrt{-m}}{m},\frac{m-\sqrt{-m}}{m}\right]$$

definite pentru $m<0$. Soluţia inecuaţiei $mx^2-2mx+1+m\le 0$, $m\in\mathbb{R}^*$, este dată de:

molnar1956@yahoo.com

AL 27 Să se determine $m \in \mathbb{R}$ ştiind că inecuaţia $4x^2 - 2(m+1)x + m \geq 0$ este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$						$+\infty$
$4x^2 - 2(m+1)x + m \geq 0$	+	+	+	0	+	+	+

$$\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow 4(m+1)^2 - 16m \leq 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m \leq 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 \leq 0 \Rightarrow m = 1$$

d

molnar1956@yahoo.com

AL 28 * Să se rezolve inecuaţia

$$\frac{1}{x^2-2\sqrt{3}x+3}+\frac{1}{|x-3|}\geq 0.$$

$$\frac{1}{x^2-2\sqrt{3}x+3}+\frac{1}{|x-3|}\geq 0; x\in R-\{\sqrt{3};3\}$$

$$\frac{1}{(x-\sqrt{3})^2}+\frac{1}{|x-3|}\geq 0$$

$$(A)\Rightarrow x\in R-\{\sqrt{3};3\}$$

b

molnar1956@yahoo.com

AL 29 Să se rezolve inecuaţia

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}\geq 0.$$

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}\geq 0$$

$$\frac{x^2-2x+1-x^2-2x-1}{x^2-1}\geq 0$$

$$\frac{-4x}{x^2-1}\geq 0$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-4x$	+	+	+	+	0	-	-	-	-
x^2-1	+	+	0	-	-	-	0	+	+
$\frac{-4x}{x^2-1}$	+	+	|	-	0	+	|	-	-

$x\in(-\infty;-1)\cup[0;1)$

a

molnar1956@yahoo.com

AL 30 * Fie ecuaţia $x^2+|x|=mx\,(x+3)\,,\ m\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât această ecuaţie să aibă exact trei rădăcini reale diferite.

I) x<0

$$x^2-x=mx(x+3)$$

$$x-1=mx+3m$$

$$x-mx=3m+1$$

$$x(1-m)=3m+1 \qquad m\in R-\{1\}$$

$$x=\frac{3m+1}{1-m}$$

I) x=0

$$0^2+|0|=m0(0+3)$$

$$0=0$$

II) x>0

$$x^2+x=mx(x+3)$$

$$x+1=mx+3m$$

$$x-mx=3m-1$$

$$x(1-m)=3m-1 \qquad m\in R-\{1\}$$

$$x=\frac{3m-1}{1-m}$$

$$m\in R-\{1\}$$

f

molnar1956@yahoo.com

AL 31 * Să se determine toate numerele reale $m \geq 0$ ştiind că mulţimea $A \cap B$ are un singur element, unde

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4mx + 3m^2 \geq 0\}, \text{ iar}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - mx - 2m^2 = 0\}.$$

molnar1956@yahoo.com

AL 32 * Să se găsească toate valorile $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 1.$$

$\sqrt{x^2-3x+2} > x+1;\quad x^2-3x+2 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$

Dacă $: x < -1 \quad + > - \quad$ *inegalitatea este adevădevă,* $x \in (-\infty;-1)$

Dacă $: x = -1 \quad + > 0 \quad$ *inegalitatea este adevădevă,* $x = -1$

Dacă $: x > -1 \quad + > +$

$$x^2 - 3x + 2 > (x+1)^2$$

$$x^2 - 3x + 2 > x^2 + 2x + 1$$

$$-5x > -1$$

$$x > \frac{1}{5} \Rightarrow x \in (-1; \frac{1}{5})$$

Solutia generală $: x \in (-\infty; \frac{1}{5})$ a

molnar1956@yahoo.com

AL 33 Să se determine toate valorile reale ale lui x astfel încât relaţia

$$2+\sqrt{x-3}+m\cdot|\sqrt{x-3}-2|=4$$

are loc pentru orice parametru real m.

molnar1956@yahoo.com

AL 34 Să se determine mulţimea

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+3} + \sqrt{9-x^2} = \sqrt[3]{x^2+18} - 3 \right\}.$$

molnar1956@yahoo.com

AL 35 * Fie ecuaţia $m\sqrt[3]{x^4+16x^2+64}+2(m-1)\sqrt[3]{x^2+8}+m-1=0,\ m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dacă A este mulţimea parametrilor m pentru care ecuaţia de mai sus are toate rădăcinile reale, atunci:

$$m\sqrt[3]{x^4+16x^2+64}+2(m-1)\sqrt[3]{x^2+8}+m-1=0$$

$$Fie\ \sqrt[3]{x^2+8}=t$$

$$mt^2+2(m-1)t+m-1=0\ \textit{are toate răădăcinil reale.}$$

$$\Delta\geq 0$$

$$4(m-1)^2-4m(m-1)\geq 0$$

$$m^2-2m+1-m^2+m\geq 0$$

$$-m\geq -1$$

$$m\leq 1$$

$$m\in(-\infty;0)\cup(0;1]$$

c

molnar1956@yahoo.com

AL 36 Fie ecuaţia $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+8}=3$. Să se determine suma modulelor rădăcinilor ecuaţiei.

$$x+8\geq 0\Rightarrow x\geq -8\Rightarrow x\in[-8;+\infty)$$

$$\sqrt[3]{1-x}=t$$
$$1-x=t^3$$
$$x=1-t^3$$

$$t+\sqrt{1-t^3+8}=3$$
$$\sqrt{9-t^3}=3-t$$
$$9-t^3=9-6t+t^2$$
$$t^3+t^2-6t=0$$
$$t(t^2+t-6)=0$$
$$t(t+3)(t-2)=0$$

$$t_1=0\Rightarrow\sqrt[3]{1-x}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=1$$

$$t_2=-3\Rightarrow\sqrt[3]{1-x}=-3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_2=28$$

$$t_3=2\Rightarrow\sqrt[3]{1-x}=2\Rightarrow$$
$$x_3=-7$$

$$|x_1|+|x_2|+|x_3|=1+28+7=36$$

a

molnar1956@yahoo.com

AL 37 Suma S a rădăcinilor ecuaţiei $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{x}}=3$ este:

$$(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$$

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{x}}=3$$

$$1+\sqrt{x}+3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(8-\sqrt{x})}[\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{x}}]+8-\sqrt{x}=27$$

$$9\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(8-\sqrt{x})}=18$$

$$\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(8-\sqrt{x})}=2$$

$$8+7\sqrt{x}-x=8$$

$$7\sqrt{x}-x=0$$

$$\sqrt{x}(7-\sqrt{x})=0$$

$$x_1=0$$

$$x_2=49$$

$$S=x_1+x_2=49$$

b

molnar1956@yahoo.com

AL 38 Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât domeniul de definiţie D al funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt[3]{2x^2-(m+5)x+2m+3}},$$

să coincidă cu $\mathbb{R}$.

$$2x^2-(m+5)x+2m+3 \neq 0$$

$$\Delta = (m+5)^2 - 4\cdot 2\cdot(2m+3) = m^2+10m+25-16m-24 = m^2-6m+1$$

Să nu aibă rădăcini reale:

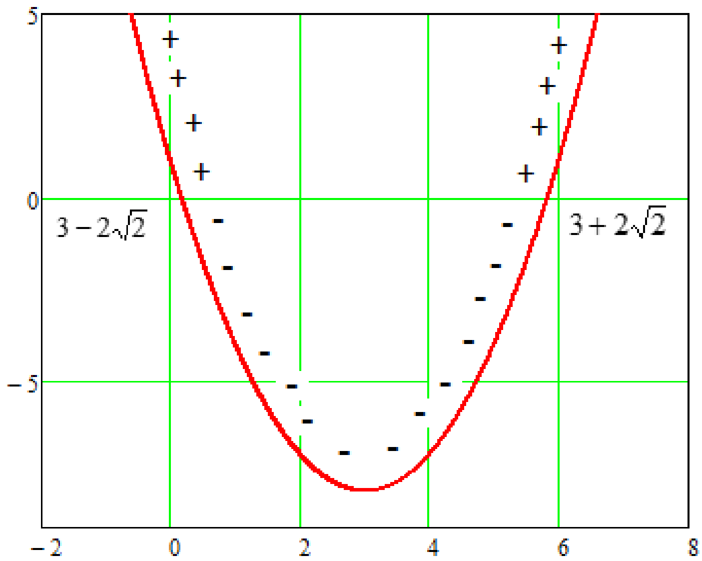
$$\Delta < 0$$

$$m^2-6m+1<0$$

$$m_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{32}}{2} = \frac{6\pm 4\sqrt{2}}{2} = 3\pm 2\sqrt{2}$$

$$m \in (3-2\sqrt{2};3+2\sqrt{2})$$

f



molnar1956@yahoo.com

AL 39 * Câte numere întregi are mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R}, |2x - 3| \leq 6\}$?

$$|2x-3| \leq 6$$

$$-6 \leq 2x - 3 \leq 6$$

$$-3 \leq 2x \leq 9$$

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$$

$$-1{,}5 \leq x \leq 4{,}5$$

$\{-1;0;1;2;3;4\}$ Mulțimea A are șase numere întregi.

e

molnar1956@yahoo.com

AL 40 Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$. Să se găsească soluţia inecuaţiei

$$2f^2(x) - 3f(x) + 1 \geq 0.$$

molnar1956@yahoo.com

AL 41 * Să se determine toate valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ ştiind că graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \doteq |m - 2x| - |x + 3| + 1$$

intersectează axa Ox într-un singur punct.

molnar1956@yahoo.com

AL 42 Graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x^2-2mx-1-m+m^2,\ m\in\mathbb{R},$$

este parabola P. Vârful parabolei P se găseşte pe dreapta:

molnar1956@yahoo.com

AL 43 * Să se afle parametrul real m ştiind că graficul funcţiei

$$f(x) = mx^2 - \left(m^2+1\right)x + 1$$

este tangent axei Ox în $x = 1$.

$$\begin{cases} x = 1 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow m - m^2 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow 1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow m - m^2 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow 1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$$

b

$$f : R \to R$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

molnar1956@yahoo.com

AL 44 * Să se determine toate valorile parametrului real m ştiind că mulţimea valorilor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 - x + 1}$ este un interval de lungime 4.

$$f'(x) = \frac{(2x+m)(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+mx+1)}{(x^2-x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^2 + 2x + mx^2 - mx + m - 2x^3 - 2mx^2 - 2x + x^2 + mx + 1}{(x^2-x+1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2(m+1)+(m+1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{(m+1)(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2} \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

$$|f(1) - f(-1)| = 4 \Rightarrow \left|\frac{2+m}{1} - \frac{2-m}{3}\right| = 4 \Rightarrow |6 + 3m - 2 + m| = 12 \Rightarrow$$

$$|4m+4| = 12 \Rightarrow |m+1| = 3$$

$$m + 1 = -3 \qquad m + 1 = 3$$

$$m = -4 \qquad m = 2$$

d

molnar1956@yahoo.com

AL 45 * Să se afle parametrul real m ştiind că graficul funcţiei

$$f(x) = -m^2x^2 + 2mx - 1$$

conţine punctul $A(1,0)$. Pentru valorile găsite ale lui m notăm cu n numărul de puncte în care graficul funcţiei f intersectează sau este tangent axei Ox. Să se determine n.

molnar1956@yahoo.com

AL 46 * Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}, m \neq 1$, punctele de intersecţie ale graficelor funcţiilor

$$f(x) = mx^2 - x + 1 \text{ şi } g(x) = x^2 - mx + m,$$

sunt distincte şi se găsesc pe axa Ox ?

molnar1956@yahoo.com

AL 47 * Să se determine valoarea minimă m, respectiv maximă M, a funcţiei $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

molnar1956@yahoo.com

AL. 48 Să se determine valoarea minimă m, respectiv maximă M, a funcţiei $f : [2, 8] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

molnar1956@yahoo.com

AL 49 * Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 3$.

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

$$f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$f(2) = 4 - 6 + 3 = 1$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

$$f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$f(2) = 4 - 6 + 3 = 1$$

$$\Rightarrow x \in \left\{1; \frac{3}{2}; 2\right\}$$

c

molnar1956@yahoo.com

AL 50 * Fie m un număr real arbitrar fixat. Notăm cu M maximul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+mx-1-m^2$. Care din următoarele afirmaţii este adevărată?